

Задача Рамсея: три подхода к решению

Киселёв Ю.Н.¹, Орлов М.В.², Орлов С.М.³

¹kiselev@cs.msu.su

²orlov@cs.msu.su

³sergey.orlov@cs.msu.su

Кафедра оптимального управления
ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

II Международный семинар “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби”, посвящённый 70-летию академика А.И. Субботина

Екатеринбург, апрель 2015 года

Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = ux^\varepsilon - \mu x, & x(0) = x_0, \\ J[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} (1-u)x^\varepsilon dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ x — фондовооружённость
- ▶ $u(t) \in [0, 1]$ — доля капиталовложений от производственного выпуска
- ▶ $\mu > 0$ — коэффициент амортизации производственных фондов
- ▶ $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования
- ▶ $\varepsilon \in (0, 1)$ — коэффициент эластичности по производственным фондам
- ▶ $J[u]$ — дисконтированное удельное потребление

Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = ux^\varepsilon - \mu x, & x(0) = x_0, \\ J[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} (1-u)x^\varepsilon dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ x — фондовооружённость
- ▶ $u(t) \in [0, 1]$ — доля капиталовложений от производственного выпуска
- ▶ $\mu > 0$ — коэффициент амортизации производственных фондов
- ▶ $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования
- ▶ $\varepsilon \in (0, 1)$ — коэффициент эластичности по производственным фондам
- ▶ $J[u]$ — дисконтированное удельное потребление

Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = ux^\varepsilon - \mu x, & x(0) = x_0, \\ J[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} (1-u)x^\varepsilon dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ x — фондовооружённость
- ▶ $u(t) \in [0, 1]$ — доля капиталовложений от производственного выпуска
- ▶ $\mu > 0$ — коэффициент амортизации производственных фондов
- ▶ $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования
- ▶ $\varepsilon \in (0, 1)$ — коэффициент эластичности по производственным фондам
- ▶ $J[u]$ — дисконтированное удельное потребление

Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = ux^\varepsilon - \mu x, & x(0) = x_0, \\ J[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} (1-u)x^\varepsilon dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ x — фондовооружённость
- ▶ $u(t) \in [0, 1]$ — доля капиталовложений от производственного выпуска
- ▶ $\mu > 0$ — коэффициент амортизации производственных фондов
- ▶ $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования
- ▶ $\varepsilon \in (0, 1)$ — коэффициент эластичности по производственным фондам
- ▶ $J[u]$ — дисконтированное удельное потребление

Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = ux^\varepsilon - \mu x, & x(0) = x_0, \\ J[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} (1-u)x^\varepsilon dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ x — фондовооружённость
- ▶ $u(t) \in [0, 1]$ — доля капиталовложений от производственного выпуска
- ▶ $\mu > 0$ — коэффициент амортизации производственных фондов
- ▶ $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования
- ▶ $\varepsilon \in (0, 1)$ — коэффициент эластичности по производственным фондам
- ▶ $J[u]$ — дисконтированное удельное потребление

Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = ux^\varepsilon - \mu x, & x(0) = x_0, \\ J[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} (1-u)x^\varepsilon dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ x — фондовооружённость
- ▶ $u(t) \in [0, 1]$ — доля капиталовложений от производственного выпуска
- ▶ $\mu > 0$ — коэффициент амортизации производственных фондов
- ▶ $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования
- ▶ $\varepsilon \in (0, 1)$ — коэффициент эластичности по производственным фондам
- ▶ $J[u]$ — дисконтированное удельное потребление

Постановка задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = ux^\varepsilon - \mu x, \quad x(0) = x_0, \\ J[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} (1-u)x^\varepsilon dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{array} \right. \quad (1)$$

- ▶ x — фондовооружённость
- ▶ $u(t) \in [0, 1]$ — доля капиталовложений от производственного выпуска
- ▶ $\mu > 0$ — коэффициент амортизации производственных фондов
- ▶ $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования
- ▶ $\varepsilon \in (0, 1)$ — коэффициент эластичности по производственным фондам
- ▶ $J[u]$ — дисконтированное удельное потребление

Подходы к решению задачи

Задача может быть решена с помощью

1. специального интегрального представления функционала
2. принципа максимума Понтрягина с привлечением теоремы о достаточных условиях оптимальности
3. метода динамического программирования Беллмана

Первый подход к решению:
Специальное интегральное представление
функционала

Вилка для допустимых траекторий

Лемма 1. Для любой допустимой траектории $x(t)$ в задаче (1) выполняется двойное неравенство

$$x_-(t) \leq x(t) \leq x_+(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где нижняя граница $x_-(t)$ вилки (27), получаемая при управлении $u(t) \equiv 0$, определяется формулой

$$x_-(t) = x_0 e^{-\mu t},$$

а верхняя граница $x_+(t)$ вилки (27), получаемая при управлении $u(t) \equiv 1$, определяется формулой

$$x_+(t) = \left[(x_0^{1-\varepsilon} - 1/\mu) e^{-\mu(1-\varepsilon)t} + 1/\mu \right]^{1/(1-\varepsilon)}.$$

Множеством достижимости $X(T)$ в момент времени $T \geq 0$ является отрезок, концами которого служат границы вилки (27) в момент времени T :

$$X(T) = [x_-(T), x_+(T)].$$

Специальное интегральное представление функционала

Лемма 2 (основная лемма). *Критерий J в задаче (1) допускает представление*

$$J[x(\cdot)] = x_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} W(x(t)) dt,$$

где функция $W(x)$ определяется равенством

$$W(x) = x^\varepsilon - (\mu + \nu)x, \quad x \geq 0.$$

Свойства функции $W(x)$

Лемма 3. Функция $W(x)$ обладает следующими свойствами:

$W(0) = 0$, $W(\sigma) = 0$, $W(+\infty) = -\infty$; $W(x) > 0$, $x \in (0, \sigma)$; $W(x) < 0$, $x \in (\sigma, +\infty)$; $W'(x) > 0$, $x \in (0, x_*)$; $W'(x_*) = 0$; $W'(x) < 0$, $x \in (x_*, +\infty)$, где $x_* = (\varepsilon/(\mu + \nu))^{1/(1-\varepsilon)}$ — единственный

максимизатор функции $W(\cdot)$:
$$x_* = \operatorname{argmax}_{0 \leq \xi < +\infty} W(\xi) = \operatorname{argmax}_{0 < \xi < \sigma} W(\xi).$$

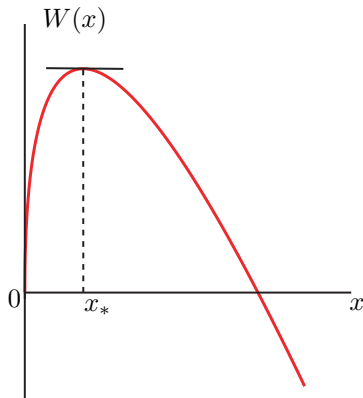


Рис. 1. График функции $W(x)$

Основной результат для задачи

Теорема 1. *Оптимальная траектория $x_{\text{opt}}(t)$ в задаче (1) имеет вид*

$$x_{\text{opt}}(t) = \operatorname{argmax}_{\xi \in X(t)} W(\xi), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Оптимальное управление $u_{\text{opt}}(t)$ в задаче (1) определяется равенством

$$u_{\text{opt}}(t) = (\dot{x}_{\text{opt}}(t) + \mu x_{\text{opt}}(t)) / x_{\text{opt}}^{\varepsilon}(t)$$

в точках дифференцируемости траектории (3) и удовлетворяет в этих точках включению $u_{\text{opt}}(t) \in [0, 1]$.

Классификация типов оптимальных решений

1. “малые” начальные значения $0 < x_0 < x_*$:

$$x_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} x_+(t), & 0 \leq t < \tau_1, \\ x_*, & \tau_1 \leq t < +\infty, \end{cases} \quad u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \tau_1, \\ \mu x_*^{1-\varepsilon}, & \tau_1 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

где точка переключения τ_1 определяется равенством

$$\tau_1 = \frac{1}{\mu(1-\varepsilon)} \ln \frac{1/\mu - x_0^{1-\varepsilon}}{1/\mu - x_*^{1-\varepsilon}} > 0.$$

2. особое начальное значение $x_0 = x_*$:

$$x_{\text{opt}}(t) \equiv x_*, \quad u_{\text{opt}}(t) \equiv \mu x_*^{1-\varepsilon}.$$

3. “большие” начальные значения $x_0 > x_*$:

$$x_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} x_-(t), & 0 \leq t < \tau_3, \\ x_*, & \tau_3 \leq t < +\infty, \end{cases} \quad u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau_3, \\ \mu x_*^{1-\varepsilon}, & \tau_3 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

где точка переключения τ_3 определяется равенством

$$\tau_3 = \frac{1}{\mu} \ln \frac{x_0}{x_*} > 0.$$

Классификация типов оптимальных решений

1. “малые” начальные значения $0 < x_0 < x_*$:

$$x_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} x_+(t), & 0 \leq t < \tau_1, \\ x_*, & \tau_1 \leq t < +\infty, \end{cases} \quad u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \tau_1, \\ \mu x_*^{1-\varepsilon}, & \tau_1 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

где точка переключения τ_1 определяется равенством

$$\tau_1 = \frac{1}{\mu(1-\varepsilon)} \ln \frac{1/\mu - x_0^{1-\varepsilon}}{1/\mu - x_*^{1-\varepsilon}} > 0.$$

2. особое начальное значение $x_0 = x_*$:

$$x_{\text{opt}}(t) \equiv x_*, \quad u_{\text{opt}}(t) \equiv \mu x_*^{1-\varepsilon}.$$

3. “большие” начальные значения $x_0 > x_*$:

$$x_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} x_-(t), & 0 \leq t < \tau_3, \\ x_*, & \tau_3 \leq t < +\infty, \end{cases} \quad u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau_3, \\ \mu x_*^{1-\varepsilon}, & \tau_3 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

где точка переключения τ_3 определяется равенством

$$\tau_3 = \frac{1}{\mu} \ln \frac{x_0}{x_*} > 0.$$

Классификация типов оптимальных решений

1. “малые” начальные значения $0 < x_0 < x_*$:

$$x_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} x_+(t), & 0 \leq t < \tau_1, \\ x_*, & \tau_1 \leq t < +\infty, \end{cases} \quad u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \tau_1, \\ \mu x_*^{1-\varepsilon}, & \tau_1 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

где точка переключения τ_1 определяется равенством

$$\tau_1 = \frac{1}{\mu(1-\varepsilon)} \ln \frac{1/\mu - x_0^{1-\varepsilon}}{1/\mu - x_*^{1-\varepsilon}} > 0.$$

2. особое начальное значение $x_0 = x_*$:

$$x_{\text{opt}}(t) \equiv x_*, \quad u_{\text{opt}}(t) \equiv \mu x_*^{1-\varepsilon}.$$

3. “большие” начальные значения $x_0 > x_*$:

$$x_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} x_-(t), & 0 \leq t < \tau_3, \\ x_*, & \tau_3 \leq t < +\infty, \end{cases} \quad u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau_3, \\ \mu x_*^{1-\varepsilon}, & \tau_3 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

где точка переключения τ_3 определяется равенством

$$\tau_3 = \frac{1}{\mu} \ln \frac{x_0}{x_*} > 0.$$

Классификация типов оптимальных решений

1. “малые” начальные значения $0 < x_0 < x_*$:

$$x_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} x_+(t), & 0 \leq t < \tau_1, \\ x_*, & \tau_1 \leq t < +\infty, \end{cases} \quad u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \tau_1, \\ \mu x_*^{1-\varepsilon}, & \tau_1 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

где точка переключения τ_1 определяется равенством

$$\tau_1 = \frac{1}{\mu(1-\varepsilon)} \ln \frac{1/\mu - x_0^{1-\varepsilon}}{1/\mu - x_*^{1-\varepsilon}} > 0.$$

2. особое начальное значение $x_0 = x_*$:

$$x_{\text{opt}}(t) \equiv x_*, \quad u_{\text{opt}}(t) \equiv \mu x_*^{1-\varepsilon}.$$

3. “большие” начальные значения $x_0 > x_*$:

$$x_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} x_-(t), & 0 \leq t < \tau_3, \\ x_*, & \tau_3 \leq t < +\infty, \end{cases} \quad u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau_3, \\ \mu x_*^{1-\varepsilon}, & \tau_3 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

где точка переключения τ_3 определяется равенством

$$\tau_3 = \frac{1}{\mu} \ln \frac{x_0}{x_*} > 0.$$

Примеры

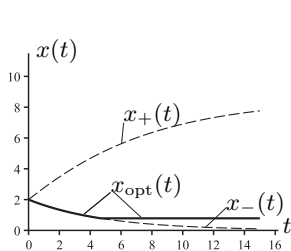


Рис. 2. Оптимальная траектория при $\varepsilon = 1/4$

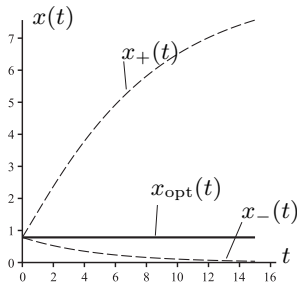


Рис. 3. Оптимальная траектория при $\varepsilon = 1/4$

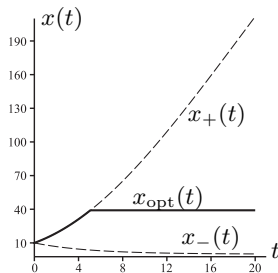


Рис. 4. Оптимальная траектория при $\varepsilon = 3/4$

Второй подход к решению:
Принцип максимума Понтрягина и теорема о
достаточных условиях оптимальности

Основные конструкции ПМП

Составим функцию Гамильтона–Понтрягина

$$K(t, x, \psi, u) = e^{-\nu t}(1 - u)x^\varepsilon + \psi(ux^\varepsilon - \mu x),$$

сопряжённое уравнение

$$\dot{\psi} = -K'_x = -\varepsilon((1 - u)e^{-\nu t} + \psi u)x^{\varepsilon-1} + \mu\psi$$

и функцию переключения

$$\pi(t, \psi) \equiv K'_u x^{-\varepsilon} = -e^{-\nu t} + \psi.$$

Вычисление возможного особого режима

Тождества $\pi \equiv 0$ и $\dot{\pi} \equiv 0$ влекут $x \equiv \left(\frac{\varepsilon}{\mu + \nu} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Таким образом, вдоль возможного особого режима траектория сохраняет постоянное значение

$$x \equiv x_{\text{sng}}, \quad (4)$$

где $x_{\text{sng}} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu + \nu} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = x_*$, причём параметр x_* есть максимизатор функции $W(x)$ (см. лемму 3).

Дифференцирование соотношения (4) по времени даёт $\dot{x} = 0$, откуда в силу основного уравнения определяется особое управление

$$u = u_{\text{sng}}, \quad u_{\text{sng}} = \mu x_*^{1-\varepsilon} = \frac{\mu \varepsilon}{\mu + \nu} \in (0, 1).$$

Максимизатор и краевая задача принципа максимума

Максимизатор функции Гамильтона–Понтрягина:

$$u_*(t, \psi) = \begin{cases} 1, & \pi(t, \psi) > 0 \\ u_{\text{sng}}, & \pi(t, \psi) = 0, \\ 0, & \pi(t, \psi) < 0. \end{cases}$$

Краевая задача принципа максимума принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_* x^\varepsilon - \mu x, & x(0) = x_0, \\ \dot{\psi} = -\varepsilon u_* \pi x^{\varepsilon-1} - \varepsilon e^{-\nu t} x^{\varepsilon-1} + \mu \psi, & \psi(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Предположим, что найдено решение краевой задачи ПМП.

Обоснование оптимальности экстремального решения

- ▶ Рассматривается любой допустимый процесс

$$(\hat{x}(t), \hat{u}(t)), \quad 0 \leq t < +\infty,$$

- ▶ Вводится приращение функционала

$$\Delta J = J[\hat{u}(\cdot)] - J[u(\cdot)]$$

- ▶ Справедливо интегральное представление приращения функционала

$$\Delta J = \int_0^{+\infty} \left\{ K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - K(t, x(t), \psi(t), u(t)) - \right. \\ \left. - (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t)) \right\} dt.$$

- ▶ $\Delta J \leq 0$ в силу вогнутости функции Кобба–Дугласа $F(x) = x^\varepsilon$.

Третий подход к решению:
Метод динамического программирования
Беллмана

Семейство задач $(P_{\tau,y})$

Введём семейство задач $(P_{\tau,y})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = ux^\varepsilon - \mu x, \quad x(\tau) = y, \\ J_{\tau,y}[u] = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\nu t} (1-u)x^\varepsilon dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{array} \right.$$

Функция Беллмана для семейства задач $(P_{\tau,y})$

Введём функцию Беллмана для семейства задач $(P_{\tau,y})$

$$V(\tau, y) = \max_{u(\cdot)} J_{\tau,y}[u(\cdot)].$$

Справедливо следующее соотношение в силу принципа оптимальности:

$$V(\tau, y) = e^{-\nu\tau} v(y).$$

где $v(y) = V(0, y)$.

Дифференциальное уравнение Беллмана

Утверждение. Функция $V(t, x) = e^{-\nu t} v(x)$ является гладким решением дифференциального уравнения Беллмана

$$V'_t(t, x) + \max_{u \in [0, 1]} \{e^{-\nu t}(1 - u)x^\varepsilon + V'_x(t, x)(ux^\varepsilon - \mu x)\} = 0$$

с краевым условием $V(+\infty, x) = 0$.

Решение дифференциального уравнения Беллмана

Уравнение Беллмана можно переписать в виде

$$\max_{u \in [0,1]} \{ (u[v'(x) - 1]x^\varepsilon + [x^\varepsilon - \mu x v'(x)]) \} = \nu v(x). \quad (5)$$

В случае $v'(x) > 1$ уравнение (5) принимает вид

$$v'(x) = \frac{\nu v(x)}{x^\varepsilon - \mu x}. \quad (6)$$

В случае $v'(x) \in (0, 1)$ уравнение (5) принимает вид

$$v'(x) = \frac{x^\varepsilon - \nu v(x)}{\mu x}. \quad (7)$$

Решение дифференциального уравнения Беллмана

Проинтегрировав уравнения (6), (7) и используя условия непрерывности функций $v(x)$ и $v'(x)$, получим решение дифференциального уравнения Беллмана:

$$v(x) = \begin{cases} A \left(\frac{1-\mu x^{1-\varepsilon}}{1-\mu x_{\text{sng}}^{1-\varepsilon}} \right)^{-\frac{\nu}{\mu(1-\varepsilon)}}, & 0 < x < x_{\text{sng}}, \\ A, & x = x_{\text{sng}}, \\ \frac{x^\varepsilon}{\nu+\mu\varepsilon} + \left(\frac{x}{x_{\text{sng}}} \right)^{-\frac{\nu}{\mu}} \left[A - \frac{x_{\text{sng}}^\varepsilon}{\nu+\mu\varepsilon} \right], & x_{\text{sng}} < x < +\infty, \end{cases}$$

где $A = \frac{(1 - u_{\text{sng}})x_{\text{sng}}^\varepsilon}{\nu} > 0$.

Замечание: функция $v''(x)$ непрерывна при $x > 0$.

Решение задачи оптимального управления (1)

Найдём u из условия максимума

$$K(t, x, \psi, u) \Big|_{\psi=V'_x(t,x)} = e^{-\nu t}(1-u)x^\varepsilon + e^{-\nu t}v'(x)(ux^\varepsilon - \mu x) \Rightarrow \max_{u \in [0,1]}.$$

Получим оптимальный синтез

$$u_*(x) = \begin{cases} 1, & v'(x) > 1, \\ u_{\text{снг}}, & v'(x) = 1, \\ 0, & v'(x) \in (0, 1). \end{cases}$$

2. Кусочно-гладкая эластичность производства

2.0 Литература

- [1] Кряжимский А. В., Тарасьев А. М. Краткосрочная адаптация и долгосрочная инвестиционная политика в моделях экономического роста // Тихоновские чтения — 2013. Материалы конференции.
- [2] Кряжимский А. В., Тарасьев А. М. Адаптивный экономический рост // Конференция «Оптимальное управление и приложения», посвященная 105-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина, 2013. Материалы конференции.
- [3] Ulveling, E. F., Fletcher, L. B., A Cobb-Douglas Production Function with Variable Returns to Scale // Am. J. Agr. Econ. (1970) 52 (2):322-326.doi: 10.2307/1237508

2. Кусочно-гладкая эластичность производства

2.1 Вилка для допустимых траекторий

- ▶ $\varepsilon(t)$ — кусочно-гладкая на луче $t \geq 0$
- ▶ Любая допустимая траектория $x(t)$ в задаче (1) допускает двустороннюю оценку

$$x_-(t) \leq x(t) \leq x_+(t), \quad t \geq 0$$

где $x_-(t), x_+(t)$ — решения задачи Коши задачи (1) при $u(t) \equiv 0, u(t) \equiv 1$

- ▶ Множество достижимости в момент времени T имеет вид:

$$X(T) = [x_-(T), x_+(T)]$$

2. Кусочно-гладкая эластичность производства

2.1 Вилка для допустимых траекторий

- ▶ $\varepsilon(t)$ — кусочно-гладкая на луче $t \geq 0$
- ▶ Любая допустимая траектория $x(t)$ в задаче (1) допускает двустороннюю оценку

$$x_-(t) \leq x(t) \leq x_+(t), \quad t \geq 0$$

где $x_-(t), x_+(t)$ — решения задачи Коши задачи (1) при $u(t) \equiv 0, u(t) \equiv 1$

- ▶ Множество достижимости в момент времени T имеет вид:

$$X(T) = [x_-(T), x_+(T)]$$

2. Кусочно-гладкая эластичность производства

2.1 Вилка для допустимых траекторий

- ▶ $\varepsilon(t)$ — кусочно-гладкая на луче $t \geq 0$
- ▶ Любая допустимая траектория $x(t)$ в задаче (1) допускает двустороннюю оценку

$$x_-(t) \leq x(t) \leq x_+(t), \quad t \geq 0$$

где $x_-(t), x_+(t)$ — решения задачи Коши задачи (1) при $u(t) \equiv 0, u(t) \equiv 1$

- ▶ Множество достижимости в момент времени T имеет вид:

$$X(T) = [x_-(T), x_+(T)]$$

2 Кусочно-гладкая эластичность производства

2.2 Специальное интегральное представление функционала

- Функционал J в задаче (1) представим в виде

$$J[x(\cdot)] = x_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} W(t, x(t)) dt,$$

где функция $W(t, \cdot)$, $t \geq 0$, имеет вид

$$W(t, x) = x^{\varepsilon(t)} - (\mu + \nu)x, \quad x \geq 0$$

- Функция $W(t, x)$ для каждого $t \geq 0$ имеет единственный максимизатор $x_*(t)$ на луче $x \geq 0$, определяемый формулой

$$x_*(t) = \left(\frac{\varepsilon(t)}{\mu + \nu} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon(t)}}$$

2 Кусочно-гладкая эластичность производства

2.2 Специальное интегральное представление функционала

- Функционал J в задаче (1) представим в виде

$$J[x(\cdot)] = x_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} W(t, x(t)) dt,$$

где функция $W(t, \cdot)$, $t \geq 0$, имеет вид

$$W(t, x) = x^{\varepsilon(t)} - (\mu + \nu)x, \quad x \geq 0$$

- Функция $W(t, x)$ для каждого $t \geq 0$ имеет единственный максимизатор $x_*(t)$ на луче $x \geq 0$, определяемый формулой

$$x_*(t) = \left(\frac{\varepsilon(t)}{\mu + \nu} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon(t)}}$$

2. Кусочно-гладкая эластичность производства

2.3 Основная теорема

Обозначим $\tau = \min\{t \geq 0 : x_*(t) \in X(t)\}$.

Теорема 1'. *Оптимальная траектория $x_{\text{opt}}(t)$ в задаче (1) определяется равенством ($t \geq 0$):*

$$x_{\text{opt}}(t) = \operatorname{argmax}_{x \in X(t)} W(t, x) = \begin{cases} x_+(t), & x_*(t) > x_+(t), \\ x_*(t), & x_*(t) \in [x_-(t), x_+(t)], \\ x_-(t), & x_*(t) < x_-(t); \end{cases} \quad (8)$$

и оптимальное управление $u_{\text{opt}}(t)$ в задаче (1) имеет вид

$$u_{\text{opt}}(t) = \frac{\dot{x}_{\text{opt}}(t) + \mu x_{\text{opt}}(t)}{x_{\text{opt}}^{\varepsilon(t)}(t)} = \begin{cases} 1, & x_*(t) > x_+(t), \\ u_*(t), & x_* \in [x_-(t), x_+(t)], \\ 0, & x_*(t) < x_-(t); \end{cases}$$

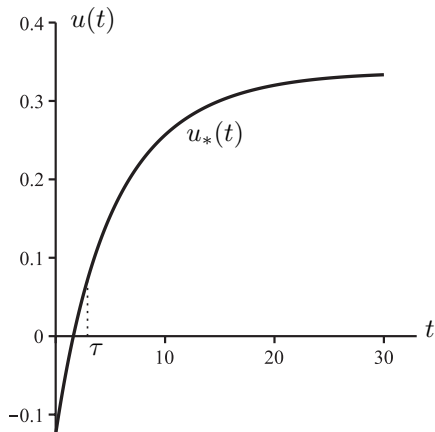
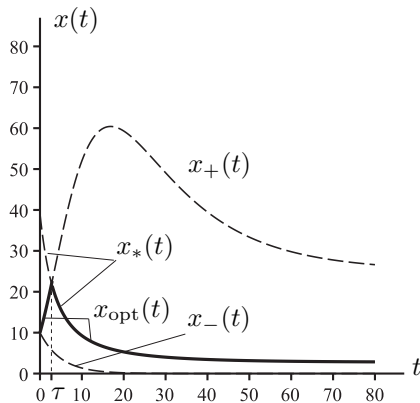
в точках дифференцируемости траектории (8) при условии, что для любого $t \geq \tau$ выполнено включение $u_{\text{opt}}(t) \in [0, 1]$.

Здесь $u_*(t) = \frac{\mu \varepsilon(t)}{\mu + \nu} + \dot{\varepsilon}(t) \left(\frac{1}{\varepsilon(t)(1-\varepsilon(t))} + \frac{\ln \frac{\varepsilon(t)}{\mu+\nu}}{(1-\varepsilon(t))^2} \right)$.

2. Кусочно-гладкая эластичность производства

2.4 Пример подходящей функции $\varepsilon(t)$

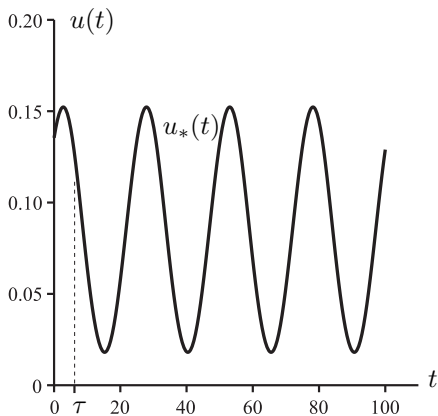
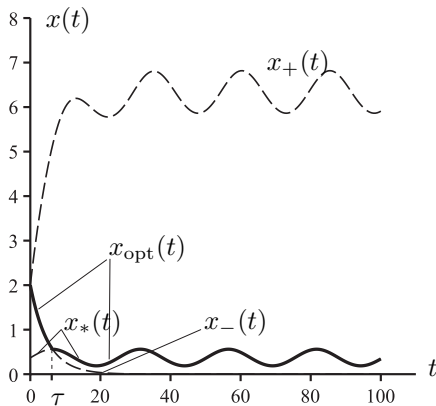
$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-0.05t}, x_0 = 10, \mu = 0.2, \nu = 0.1,$$



2. Кусочно-гладкая эластичность производства

2.4 Пример подходящей функции $\varepsilon(t)$

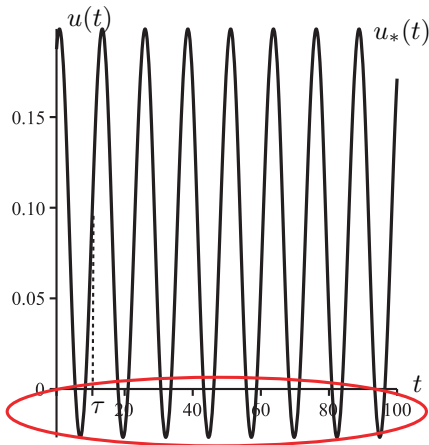
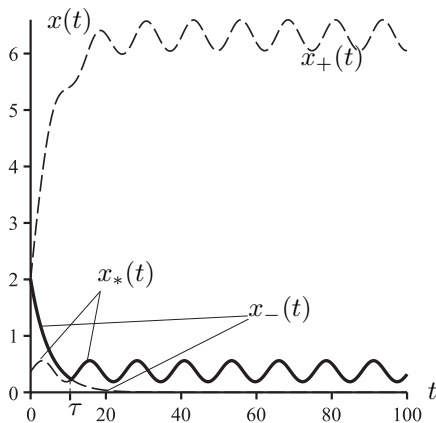
$$\varepsilon(t) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \sin 0.25t, x_0 = 2, \mu = 0.2, \nu = 0.1,$$



2. Кусочно-гладкая эластичность производства

2.4 Пример неподходящей функции $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \sin 0.5t, x_0 = 2, \mu = 0.2, \nu = 0.1,$$



3. Кусочно-постоянная эластичность производства

3.1 Вилка и специальное интегральное представление функционала

►
$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq t < \theta, \\ \varepsilon_2, & \theta \leq t < +\infty; \end{cases}, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, \varepsilon_i \in (0, 1), i = 1, 2$$

► Справедлива вилка для допустимых траекторий

$$x_-(t) \leq x(t) \leq x_+(t), \quad t \geq 0$$

► Справедливо специальное интегральное представление функционала

$$J[x(\cdot)] = x_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} W(t, x(t)) dt,$$

► Максимизатор функции $W(t, x)$ принимает вид

$$x_*(t) = \left(\frac{\varepsilon(t)}{\mu + \nu} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon(t)}} = \begin{cases} x_{\varepsilon_1}, & 0 \leq t < \theta, \\ x_{\varepsilon_2}, & \theta \leq t < +\infty \end{cases}$$

3. Кусочно-постоянная эластичность производства

3.1 Вилка и специальное интегральное представление функционала

► $\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq t < \theta, \\ \varepsilon_2, & \theta \leq t < +\infty; \end{cases}, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, \varepsilon_i \in (0, 1), i = 1, 2$

- Справедлива вилка для допустимых траекторий

$$x_-(t) \leq x(t) \leq x_+(t), \quad t \geq 0$$

- Справедливо специальное интегральное представление функционала

$$J[x(\cdot)] = x_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} W(t, x(t)) dt,$$

- Максимизатор функции $W(t, x)$ принимает вид

$$x_*(t) = \left(\frac{\varepsilon(t)}{\mu + \nu} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon(t)}} = \begin{cases} x_{\varepsilon_1}, & 0 \leq t < \theta, \\ x_{\varepsilon_2}, & \theta \leq t < +\infty \end{cases}$$

3. Кусочно-постоянная эластичность производства

3.1 Вилка и специальное интегральное представление функционала

► $\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq t < \theta, \\ \varepsilon_2, & \theta \leq t < +\infty; \end{cases}, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, \varepsilon_i \in (0, 1), i = 1, 2$

- Справедлива вилка для допустимых траекторий

$$x_-(t) \leq x(t) \leq x_+(t), \quad t \geq 0$$

- Справедливо специальное интегральное представление функционала

$$J[x(\cdot)] = x_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} W(t, x(t)) dt,$$

- Максимизатор функции $W(t, x)$ принимает вид

$$x_*(t) = \left(\frac{\varepsilon(t)}{\mu + \nu} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon(t)}} = \begin{cases} x_{\varepsilon_1}, & 0 \leq t < \theta, \\ x_{\varepsilon_2}, & \theta \leq t < +\infty \end{cases}$$

3. Кусочно-постоянная эластичность производства

3.1 Вилка и специальное интегральное представление функционала

► $\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq t < \theta, \\ \varepsilon_2, & \theta \leq t < +\infty; \end{cases}, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, \varepsilon_i \in (0, 1), i = 1, 2$

- Справедлива вилка для допустимых траекторий

$$x_-(t) \leq x(t) \leq x_+(t), \quad t \geq 0$$

- Справедливо специальное интегральное представление функционала

$$J[x(\cdot)] = x_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} W(t, x(t)) dt,$$

- Максимизатор функции $W(t, x)$ принимает вид

$$x_*(t) = \left(\frac{\varepsilon(t)}{\mu + \nu} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon(t)}} = \begin{cases} x_{\varepsilon_1}, & 0 \leq t < \theta, \\ x_{\varepsilon_2}, & \theta \leq t < +\infty \end{cases}$$

3. Кусочно-постоянная эластичность производства

3.2 Метод поиска оптимального решения

- ▶ Разбиение задачи (1) на две подзадачи на промежутках времени $[0, \theta]$ и $[\theta, +\infty)$ с условием $x(\theta) = x_\theta$
- ▶ Построение оптимальных решений каждой из подзадач
- ▶ Нахождение решения задачи (1) путём максимизации значения функционала на объединённой траектории по всем $x_\theta \in X(\theta)$
- ▶ Обоснование оптимальности построенного решения

3. Кусочно-постоянная эластичность производства

3.2 Метод поиска оптимального решения

- ▶ Разбиение задачи (1) на две подзадачи на промежутках времени $[0, \theta]$ и $[\theta, +\infty)$ с условием $x(\theta) = x_\theta$
- ▶ Построение оптимальных решений каждой из подзадач
- ▶ Нахождение решения задачи (1) путём максимизации значения функционала на объединённой траектории по всем $x_\theta \in X(\theta)$
- ▶ Обоснование оптимальности построенного решения

3. Кусочно-постоянная эластичность производства

3.2 Метод поиска оптимального решения

- ▶ Разбиение задачи (1) на две подзадачи на промежутках времени $[0, \theta]$ и $[\theta, +\infty)$ с условием $x(\theta) = x_\theta$
- ▶ Построение оптимальных решений каждой из подзадач
- ▶ Нахождение решения задачи (1) путём максимизации значения функционала на объединённой траектории по всем $x_\theta \in X(\theta)$
- ▶ Обоснование оптимальности построенного решения

3. Кусочно-постоянная эластичность производства

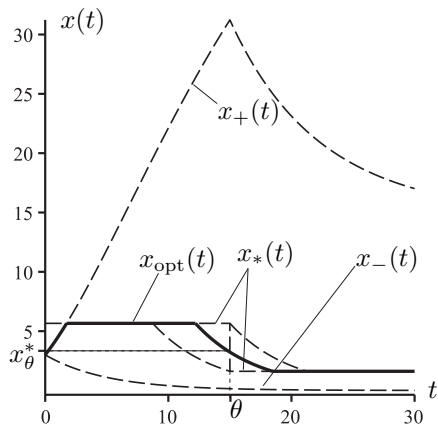
3.2 Метод поиска оптимального решения

- ▶ Разбиение задачи (1) на две подзадачи на промежутках времени $[0, \theta]$ и $[\theta, +\infty)$ с условием $x(\theta) = x_\theta$
- ▶ Построение оптимальных решений каждой из подзадач
- ▶ Нахождение решения задачи (1) путём максимизации значения функционала на объединённой траектории по всем $x_\theta \in X(\theta)$
- ▶ Обоснование оптимальности построенного решения

Кусочно-постоянная эластичность производства

3.3 Пример оптимальной траектории

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{5}, \varepsilon_2 = \frac{2}{5}, \theta = 15, x_0 = 3, \mu = 0.2, \nu = 0.1$$



Спасибо за внимание!

Список литературы I

- [1] Ашманов С. А. Математические модели и методы в экономике. М.: Изд-во МГУ, 1980.
- [2] Киселёв Ю. Н., Орлов М. В. Исследование одномерных оптимизационных моделей в случае бесконечного горизонта // Дифференц. уравн. 2004. **40**. № 12. С. 1615–1628.
- [3] Kiselev Yu. N., Orlov M. V. Investigation of one-dimensional resource allocation problems on an infinite time interval // Comp. Math. Mod. 2014. **25**. N 2. P. 231–238.
- [4] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
- [5] Киселёв Ю. Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии. М.: МАКС Пресс, 2003. С. 57–67.